

Фролов Александр Владимирович, канд. техн. наук, начальник отдела, [frolov@frolov.moscow](mailto:frolov@frolov.moscow), Россия, Москва, АО «ЦНИИАГ»,

Шаповалов Петр Анатольевич, начальник лаборатории, [kinik.keni@yandex.ru](mailto:kinik.keni@yandex.ru), Россия, Москва, АО «ЦНИИАГ»

*SYNTHESIS OF THE SINS CARRYING SYSTEM USING TOPOLOGY OPTIMIZATION,  
LATTICE STRUCTURE AND ADDITIVE MANUFACTURING*

*A.V. Frolov, P.A. Shapovalov*

*The work shows how to get details of strapdown system from titanium alloy using topological optimization and lattice structure using additive manufacturing without significantly increasing the mass of the original aluminum part. The properties and limitations of topological optimization and lattice structures are shown, the concept of axial stiffness of sensitive elements and its units of measurement is introduced.*

*Key words: SINS, additive technologies, topological optimization, finite element model.*

*Frolov Aleksandr Vladimirovich, candidate of technical sciences, head of division, [frolov@frolov.moscow](mailto:frolov@frolov.moscow), Russia, Moscow, JSC «CNIAG»,*

*Shapovalov Petr Anatolievich, head of laboratory, [kinik.keni@yandex.ru](mailto:kinik.keni@yandex.ru), Russia, Moscow, JSC «CNIAG»*

УДК 531.768

DOI: 10.24412/2071-6168-2022-1-73-82

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ГАЗОВОГО  
ДЕМПФИРОВАНИЯ В КОМПЕНСАЦИОННЫХ МАЯТНИКОВЫХ  
АКСЕЛЕРОМЕТРАХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ**

С.Ф. Коновалов, Д.В. Майоров, Д.А. Малыхин

*Рассматриваются численный метод определения коэффициента демпфирования в компенсационных маятниковых акселерометрах, а также его программная реализация. Представлены результаты, полученные с помощью разработанного программного обеспечения, и результаты, полученные экспериментально на испытательном стенде.*

*Ключевые слова: компенсационный маятниковый акселерометр, коэффициент демпфирования, метод конечных разностей.*

В настоящее время при разработке микромеханических акселерометров важно на стадии проектирования определять некоторые параметры будущего прибора, в том числе газодинамические. Это необходимо для повышения точности и виброустойчивости компенсационных маятниковых акселерометров. Применение современных программных комплексов

конечно-элементного анализа в решении газодинамических задач подразумевает достаточно высокую квалификацию специалистов и большие временные затраты на освоение интерфейса и модулей программы, так как в большинстве случаев подобные комплексы ориентированы на моделирование большого количества различных физических процессов. Также, как правило, для проведения исследований требуется создание полной модели проектируемого прибора. Поэтому возникает необходимость в создании специализированных программ, решающих отдельные физические задачи. Исходя из этого, для быстрой и точной оценки коэффициента газового демпфирования в микромеханических акселерометрах было разработано программное обеспечение, реализующее численный метод решения газодинамических задач.

**Математическая постановка задачи демпфирования.** В компенсационных маятниковых акселерометрах подвижная лопасть чувствительного элемента перемещается между двумя электродами емкостного датчика угла, рабочие зазоры которого образуют плоский газовый демпфер толщиной порядка 18 – 24 мкм [1].

При математической постановке задачи были приняты некоторые допущения: газ в зазоре вязкий и несжимаемый; движение газа ламинарное. Для такого типа задач используется уравнение Навье – Стокса, имеющее для малых зазоров следующий вид:

$$\Delta P = -\frac{12\mu}{\delta^3}V, \quad (1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $P$  – давление в зазоре;  $\mu$  – динамическая вязкость газа;  $V$  – скорость пластины, направленная на уменьшение зазора;  $\delta$  – толщина газового зазора.

Оператор Лапласа в декартовой системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Условие несжимаемости газа имеет вид

$$\operatorname{div}\bar{U} = 0,$$

где  $\bar{U}$  – вектор скорости газа;  $\operatorname{div}\bar{U}$  – дивергенция скорости газа, имеющая вид в декартовой системе координат:

$$\nabla = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}.$$

После определения давления на основании уравнения (1) при граничном условии  $P = 0$  на контуре демпфирующей пластины (рис. 1), интегрируя давление по всей площади пластины  $S$ , можно получить величину действующей газодинамической силы

$$F = \iint_S PdS,$$

где  $dS$  – элемент площади пластины.

Тогда значение коэффициента демпфирования при поступательном движении пластины

$$D_{\Pi} = \frac{F}{V} = \frac{\iint P dS}{V}.$$

Значение коэффициента демпфирования при угловом движении прямоугольной пластины, например, вокруг оси  $y$ , определяется соотношением

$$D = \frac{M}{\omega} = \frac{1}{\omega} \int_0^a \left( \int_0^b P(x, y) dy \right) x dx, \quad (2)$$

где  $M$  – газодинамический момент вокруг оси  $y$ ;  $\omega$  – угловая скорость пластины;  $a, b$  – геометрические размеры пластины вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно.

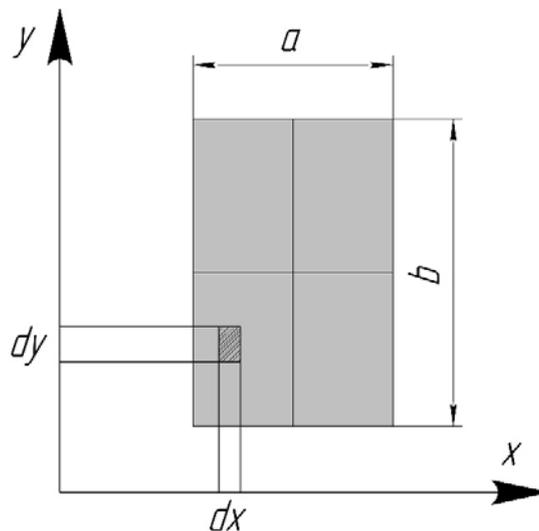


Рис. 1. Пластина газового демпфера

**Численный метод расчета коэффициента демпфирования.** Аналитически решить задачу демпфирования в тонких газовых пленках представляется возможным только для ряда простейших случаев. В реальных конструкциях акселерометров сектор демпфирования имеет довольно сложную форму, что не позволяет получить точное аналитическое решение. Однако можно применить метод численного решения дифференциального уравнения (1), что даст распределение давления  $P(x, y)$  внутри контура демпфирования. Далее, проинтегрировав это скалярное поле, согласно формуле (2) получим численное значение коэффициента демпфирования при угловом движении маятника акселерометра вокруг оси подвеса.

В случае вытекания газа из-под контура демпфирования по двум координатам имеем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{12\mu}{\delta^3} V, \quad (3)$$

где  $V = \omega \cdot y$  – скорость пластины.

При этом необходимо учесть граничные условия на периметре контура  $P(\Gamma) = 0$  и отсутствие перетекания газа через ось симметрии контура, перпендикулярной оси вращения.

Для решения уравнения (3) применяется метод конечных разностей (МКР), в котором производные функции давления заменяются дискретными аналогами согласно разностным формулам в узлах сетки с шагами  $h_x$  и  $h_y$ :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{P(x_{m-1}, y_n) - 2P(x_m, y_n) + P(x_{m+1}, y_n)}{h_x^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{P(x_m, y_{n-1}) - 2P(x_m, y_n) + P(x_m, y_{n+1})}{h_y^2}. \quad (5)$$

Подставив уравнения (4) и (5) в уравнение (3), получим следующее выражение для узлов сетки внутри контура:

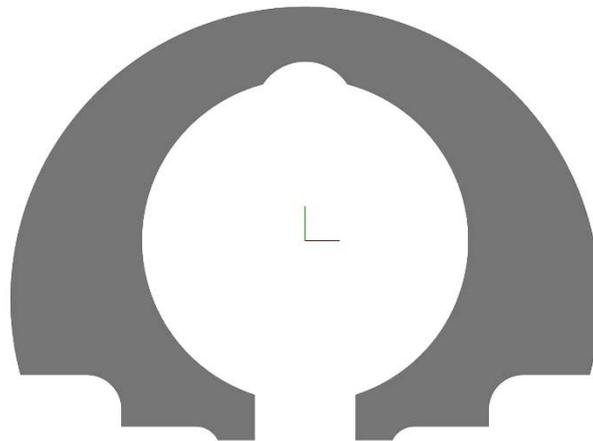
$$\frac{P(x_{m-1}, y_n) - 2P(x_m, y_n) + P(x_{m+1}, y_n)}{h_x^2} + \frac{P(x_m, y_{n-1}) - 2P(x_m, y_n) + P(x_m, y_{n+1})}{h_y^2} = -\frac{12\mu}{\delta^3} \omega \cdot y_n.$$

Полученную МКР систему линейных алгебраических уравнений можно решить итерационно и найти значения давления в узлах расчетной сетки [2]. После этого вычисляется коэффициент демпфирования акселерометра.

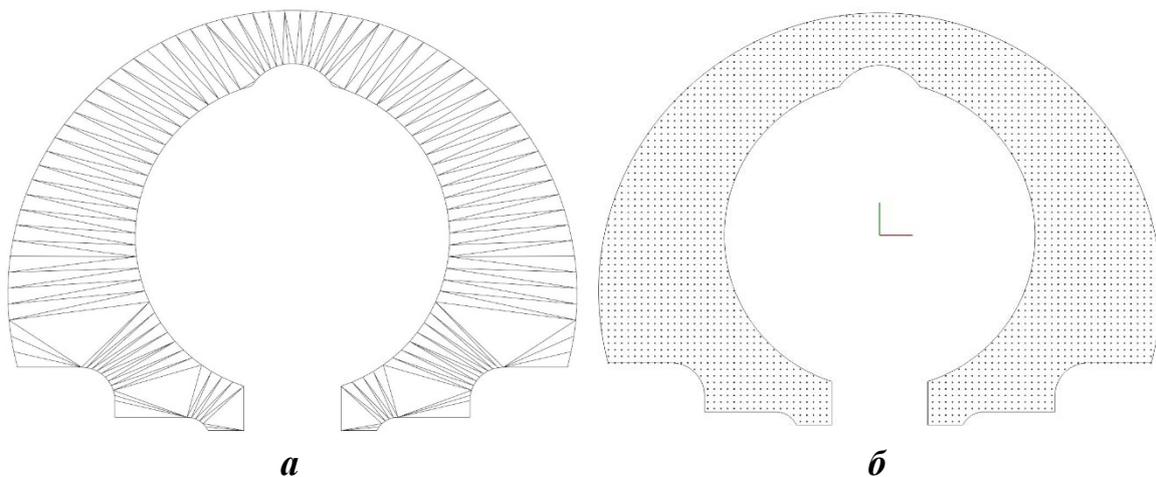
**Программная реализация численного метода.** Так как для решения поставленной задачи применяется МКР, то необходимо построить сетку на расчетной области, в узлах которой записываются и решаются разностные уравнения. Для простых случаев, когда контур представлен в виде прямоугольника, построить ортогональную сетку можно, исходя из геометрических размеров самого контура. Но в случае реальных конструкций, где сектор демпфирования представляет собой сложную геометрическую фигуру (рис. 2), для построения сетки необходимо применять дополнительные алгоритмы.

В программной реализации МКР для исследования демпфирования достаточно создать 3D-модель сектора газового демпфера. В акселерометре, который был выбран для исследований, толщина зазора  $\delta$  составляет 24 мкм. Пластина импортируется в виде триангулированной модели (рис. 3, а). Координаты вершин треугольников известны. Воспользовавшись

алгоритмом Моллера – Трумбора для определения пересечения прямой (луча) и треугольника в трехмерном пространстве, можно определить, находится ли узел сетки внутри контура [3]. И далее заполнить исходную матрицу давлений начальными значениями. Узлы расчетной сетки с заданными в программе шагами по двум осям показаны на рис. 3, б.

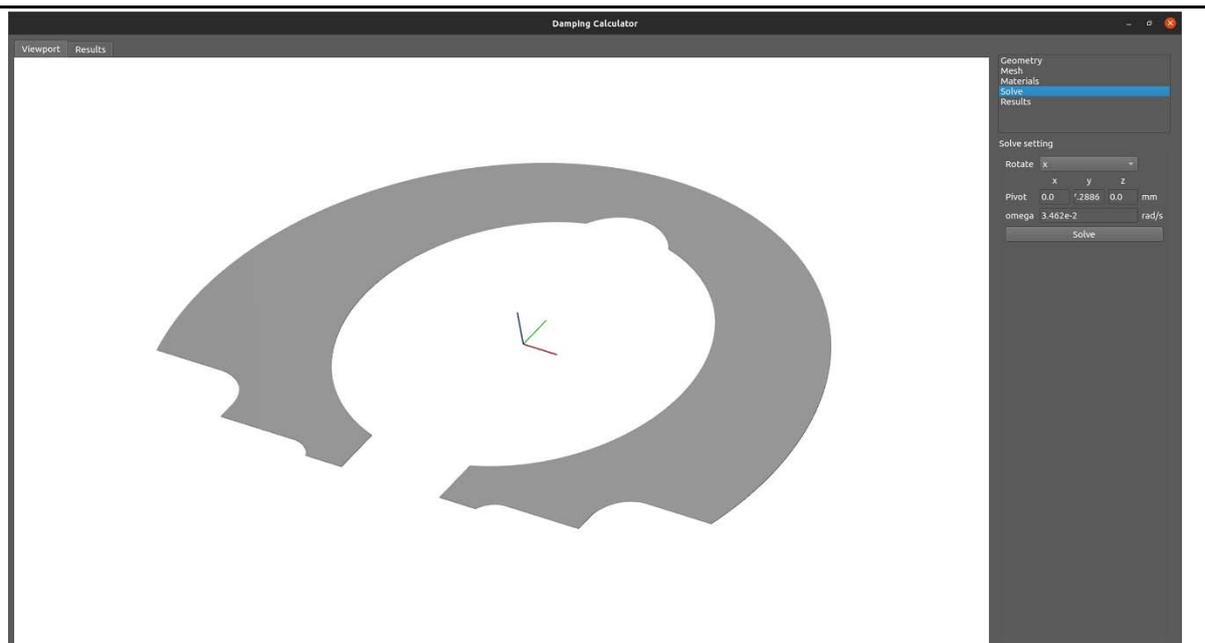


**Рис. 2. Сектор демпфирования в компенсационном маятниковом акселерометре типа Q-flex (красная линия – ось X, зеленая – ось Y)**



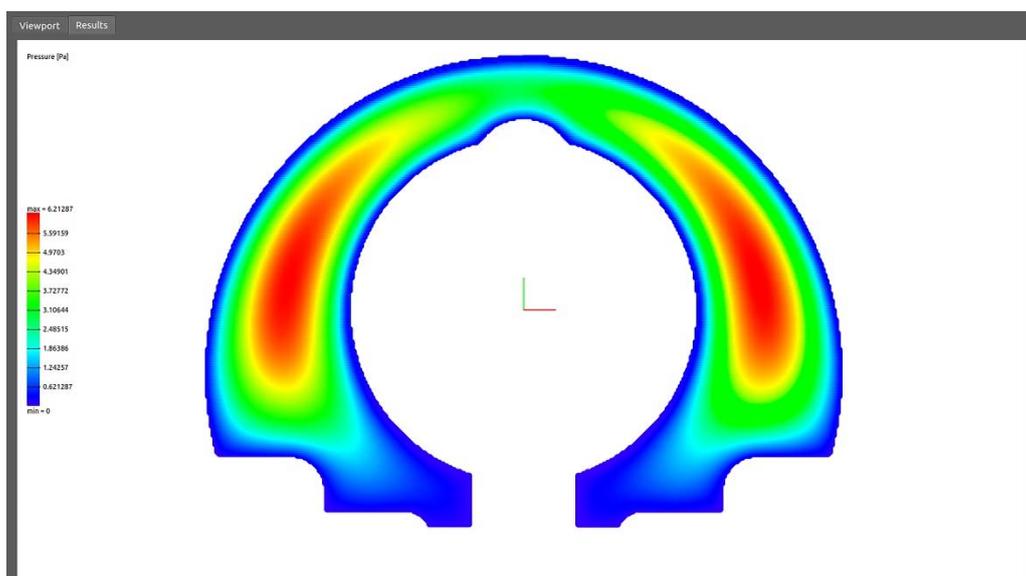
**Рис. 3. Триангулированная модель (а) и пример расчетной сетки сектора демпфирования (б)**

Все необходимые параметры для проведения исследований демпфирования (шаги расчетной сетки  $h_x$  и  $h_y$ , координаты оси вращения, которая в данном случае параллельна оси X и сдвинута по оси Y в отрицательном направлении, угловая скорость  $\omega$ , материал демпфера – воздух при температуре 20 °С с заданным значением динамической вязкости  $\mu$ ) – задаются в интерфейсе программы (рис. 4). При этом точность решения и время исследования зависят от выбранного метода расчета, условий сходимости, а также от количества узлов сетки.



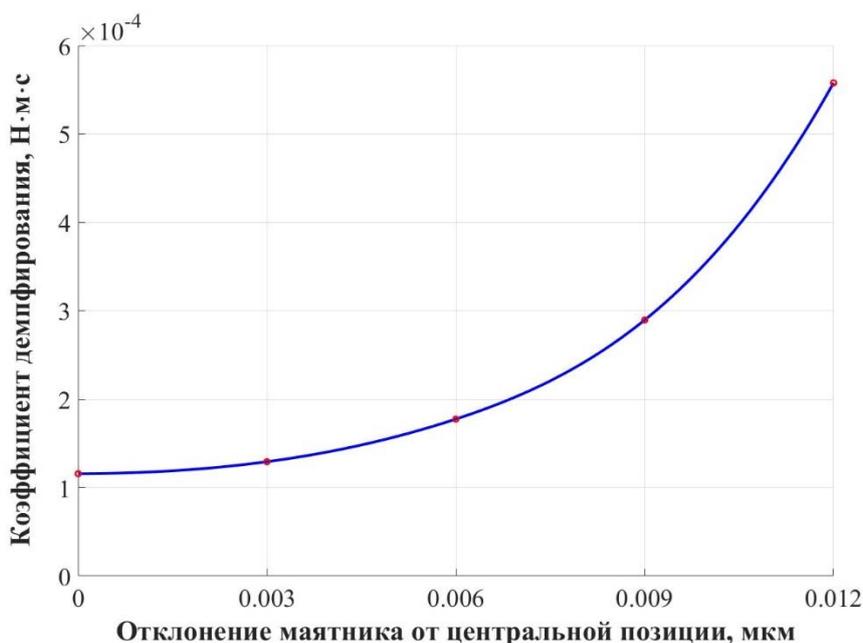
**Рис. 4. Интерфейс программы для расчета демпфирования в акселерометрах**

Результатом исследований, проведенных с помощью разработанного программного обеспечения, являются рассчитанные значения давлений в узлах сетки, которые выводятся в графическом виде во вкладке «Results» (рис. 5), и значение коэффициента демпфирования для одной стороны газового демпфера. Так как маятник акселерометра изначально находится в центральной позиции относительно электродов емкостного датчика угла и, соответственно, сверху и снизу подвижной лопасти имеются одинаковые по толщине зазоры, полный коэффициент демпфирования равен удвоенному коэффициенту, определенному для одной стороны, и составляет  $1,156 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ .



**Рис. 5. Распределение давления в секторе демпфирования**

Стоит отметить, что при приближении маятника к электродам емкостного датчика угла (ДУ) в случае несжимаемого газа коэффициент демпфирования будет изменяться нелинейно. Это связано с кубической зависимостью коэффициента демпфирования от толщины рабочего зазора. Хотя газ в зазоре сжимается и имеет место нарастание упругих свойств газа, особенно при больших скоростях набегания маятника на неподвижный элемент ДУ, можно с помощью расчетной программы, изменяя толщину зазоров газового демпфера, оценить нелинейное изменение коэффициента демпфирования при отклонении маятника от центральной позиции (рис. 6).



**Рис. 6. Изменение коэффициента демпфирования при отклонении маятника от центральной позиции в рабочем зазоре**

Как видно из графика, при отклонении маятника на половину рабочего диапазона демпфирование возрастает почти в 4 раза. Это имеет важное значение при вибрационных воздействиях на прибор, когда маятник совершает значительные колебания и на него действуют силы демпфирования, которые при различных толщинах газовых зазоров могут отклонять маятник от центральной позиции, что приводит к виброошибкам акселерометра [4].

**Экспериментальное подтверждение расчетов.** Для экспериментального определения значения коэффициента демпфирования на тестовый вход акселерометра подавался пилообразный сигнал, а съем выходного сигнала производился с эталонного резистора, при этом контур обратной связи (ОС) акселерометра замкнут.

Суть метода заключается в том, что если маятник движется с постоянной скоростью, то со стороны газовой среды на маятник будет действовать постоянный момент, который при замкнутой ОС компенсируется моментом датчика момента (ДМ). Соответственно, измеряя этот момент,

можно определить момент демпфирования. Для расчета необходимо знать скорость движения маятника в зазоре, а также масштабный коэффициент ДМ.

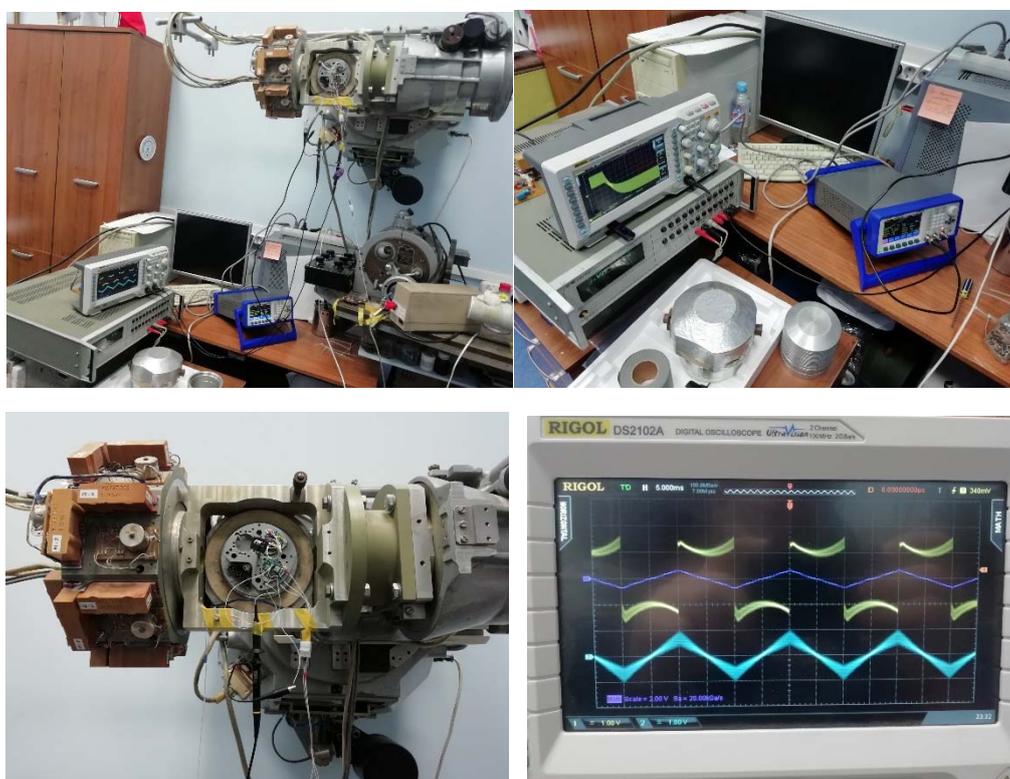
Если маятник движется с постоянной угловой скоростью, тогда

$$\dot{\alpha}D = M_{\text{ДМ}}, \quad D = \frac{M_{\text{ДМ}}}{\dot{\alpha}},$$

где  $\dot{\alpha}$  – угловая скорость движения маятника;  $M_{\text{ДМ}}$  – момент ДМ.

Из этого следует, что для определения демпфирования необходимо знать момент  $M_{\text{ДМ}}$ , развиваемый ДМ, который оценивается по току ОС, и угловую скорость движения маятника  $\dot{\alpha}$ , которая оценивается подачей сигнала, приводящего к касанию маятника ответных пластин емкостного датчика угла. Также стоит отметить, что момент ДМ при движении маятника определяется в центральной позиции, когда на показания прибора не влияет упругость подвеса и электростатические силы, действующие на маятник через систему датчика угла.

Для эксперимента был создан стенд (рис. 7) из осциллографа, генератора и акселерометра, установленного на наклонно-поворотном стенде [5]. Угловое движение маятника задавалось генератором и для дальней (от середины перемычек) точки маятника не превышало половины толщины зазора  $\delta$ . При этом скорость движения маятника управлялась частотой тестового сигнала.



**Рис. 7. Испытательный стенд для экспериментального определения коэффициента демпфирования в акселерометре**

С помощью собранного стенда были проведены несколько испытаний с различной частотой подачи тестового сигнала (от 3 до 300 Гц). Пример полученных результатов на одной частоте из заданного диапазона показан на рис. 8.



**Рис. 8. Пример экспериментальных измерений (желтый график – сигнал на эталонном резисторе, фиолетовый график – отфильтрованный сигнал на эталонном резисторе, голубой график – сигнал с демодулятора акселерометра)**

В результате проведенных натурных испытаний было определено среднее значение экспериментального коэффициента демпфирования для центральной позиции маятника в зазоре, которое составляет  $1,099 \cdot 10^{-4}$  Н·м·с. Также при анализе результатов исследований можно отметить, что момент демпфирования при отклонении маятника от центральной позиции возрастает нелинейно, что ранее было определено расчетным методом.

**Заключение.** Таким образом, разработанное программное обеспечение, реализующее описанный метод определения коэффициента демпфирования в компенсационных маятниковых акселерометрах, дает возможность быстрой оценки газодинамических параметров прибора. При оптимизации параметров расчета отклонение от экспериментальных исследований не превышает 5 %, что с учетом принятых допущений является достаточным на стадии проектирования акселерометра. В настоящее время данная программа модернизируется и дополняется алгоритмами решения, учитывающими нелинейные эффекты, связанные со сжимаемостью газовой среды.

### Список литературы

1. Pat. 3702073 (USA), Int. Cl. G 01 P 15/08. Accelerometer / E.D. Jacobs; Sundstrand Data Control, Inc. №803208; 1969.

2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
3. Möller T., Trumbore B. Fast, Minimum Storage Ray // Journal of Graphics Tools. 1997. Vol. 2. No 1. P. 21 – 28.
4. Коновалов С.Ф. Теория виброустойчивости акселерометров. М.: Машиностроение, 1991. 269 с.
5. Automatic equipment for testing accelerometers / S.F. Konovalov, B.S. Konovalov, D.V. Mayorov, G.M. Novoselov, A.V. Polynkov, A.A. Trunov // 4th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 1997. P. 223 – 231.

*Коновалов Сергей Феодосьевич, д-р техн. наук, профессор, [sercon@bk.ru](mailto:sercon@bk.ru), Россия, Москва, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,*

*Майоров Денис Владимирович, канд. техн. наук, доцент, [maord1@yandex.ru](mailto:maord1@yandex.ru), Россия, Москва, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,*

*Малыхин Дмитрий Андреевич, ассистент, [dmitriam@mail.ru](mailto:dmitriam@mail.ru), Россия, Москва, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана*

#### *DETERMINATION OF GAS DAMPING FACTOR IN COMPENSATION PENDULOUS ACCELEROMETERS BY FINITE DIFFERENCE METHOD*

*S.F. Konovalov, D.V. Mayorov, D.A. Malykhin*

*A numerical method for determining the damping factor in compensation pendulous accelerometers and its software implementation are considered. The results obtained with the developed software and the results obtained experimentally on the test equipment are presented.*

*Key words: compensation pendulous accelerometer, damping factor, finite difference method.*

*Konovalov Sergey Feodosievich, doctor of technical sciences, professor, [sercon@bk.ru](mailto:sercon@bk.ru), Russia, Moscow, Moscow Bauman State Technical University,*

*Mayorov Denis Vladimirovich, candidate of technical sciences, docent, [maord1@yandex.ru](mailto:maord1@yandex.ru), Russia, Moscow, Moscow Bauman State Technical University,*

*Malykhin Dmitry Andreevich, assistant, [dmitriam@mail.ru](mailto:dmitriam@mail.ru), Russia, Moscow, Moscow Bauman State Technical University*